学校编号： 10384　　　　分类号： ________密级： ________

学号： 200223024　　　　UDC: ____________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

Banach 空间单位球面的球覆盖性质

Property of ball-coverings of Banach Spaces

傅 瑞 瑜

指导教师姓名： 程 立 新　　教授

专 业 名 称： 概率论与数理统计

论文提交日期： 2 0 0 5　年　5 月

论文答辩日期： 2 0 0 5　年　　月

学位授予日期： 2 0 0 5　年　　月

答辩委员会主席： ____________

评　阅　人： ____________

2005 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果．本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明．本人依法享有和承担由此论文而产生的责任．

声明人 (签名):

年　　月　　日

目　　录

Contents

摘　要

从 1932 年 *Banach* 的名著 $\ll$ *Théorie des operations lineaires* $\gg$ 问世以来，人们开始了 *Banach* 空间理论的系统研究．人们已做了许多关于从 *Banach* 空间单位球的几何结构出发研究 *Banach* 空间性质的工作并且至今仍在继续．其中五类有密切联系的问题长期受到关注： (a) 凸性和光滑性的研究； (b)*Mazur* 交性质 (简称 *MIP*) 的研究； (c) 装球问题的研究； (d)"板状体" 覆盖的研究； (e) 拓扑度理论.

2004 年，程立新提出了用一族不包含原点的球去覆盖单位球球面的新的研究内容，并得到一系列有关 *Banach* 空间性质和几何性质的结果．例如：单位球面可以被可数个不含原点半径小于 1 的球覆盖的空间都是可分的， n 维空间的单位球面最少可被 2n 个不含原点的半径相同的球对称覆盖.

本文在此基础上，进一步计算了空间 $(R^n,\|\cdot\|_2)$ 中，单位球面可被 $\bigcup_{i=1}^{n} B(\pm r x_i, r)(r\in\mathbb{R}^+, x_i\in S_X)$ 覆盖时， r 的最小值是 $\frac{\sqrt{n}}{2}$. 同样地，我们可以得到空间 $(R^n,\|\cdot\|_1)$、 $(R^n,\|\cdot\|_\infty)$ 的相应 r 的最小值是 1.

如果 $2n$ 个球的球心都是光滑点且可以凸包生成以原点为内点非空的紧凸集，则这 $2n$ 个球可以构成一个不含原点的球族覆盖单位球面．如果 $2n$ 个球的球心仅仅可以凸包生成以原点为内点非空的紧凸集，但是 $2n$ 个球的球心不全是光滑点，则这 $2n$ 个球不一定构成一个不含原点的球族覆盖单位球面．我们还发现具有 *Mazur* 交性质的 n 维空间 X 的单位球面 S_X 最少可被 $n+1$ 个不含原点的球覆盖．反之， n 维空间 X 的单位球面 S_X 最少可被 $n+1$ 个不含原点的球覆盖时， X 不一定具有 *Mazur* 交性质.

关键词： 球覆盖； *Banach* 空间.

Abstract

The study geometric properties of unit balls of Banach spaces has continued since the famous work ≪ *Théorie des operations lineaires* ≫ of S.Banach .The vast researches on these topics are still going on. There are five research ereas of concerning these problems which have attracted the attention of mathematicians for a long time: (a)convexity and smoothness; (b)Mazur Intersection Property(MIP); (c)packing problem; (d)plank problem; (e)topological degree theory.

Cheng has studied the geometric property of Banach spaces in differernt view since 2004.He gave a new kind of sequence of results in this field,for instance:the sphere of the unit ball of every n-dimensional space can be covered by 2n-balls which do not meet in origin at least;And if the sphere of the unit ball of a Banach space can be covered by a sequence of balls not containing the origin with radius less than 1,then the space is separable.

In this paper,we further compute that for the space$(R^n, \|\cdot\|_2)$,if the unit sphere can be covered by $\bigcup_{i=1}^{n} B(\pm rx_i, r)(r \in \mathbb{R}^+, x_i \in S_X)$,then $min(r) = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Similarly,we obtain the min(r) of $(R^n, \|\cdot\|_1)$ and $(R^n, \|\cdot\|_\infty)$ are 1,resp.

We also demonstrate that for an n-dimensional space ,if we can choose 2n smooth points $\{x_i\}_{i=1}^{2n}$ whose convex hull contains the origin in its interior,then the unit sphere can be covered by 2n balls $\bigcup_{i=1}^{2n} B(rx_i, r - \frac{1}{r})$ for some $r \in \mathbb{R}^+$. If $\{x_i\}_{i=1}^{2n}$ whose convex hull contains the origin in its interior,but they are not all smooth points,then the unit sphere not always be covered by 2n balls $\bigcup_{i=1}^{2n} B(rx_i, r)$ for any $r \in \mathbb{R}^+$. If the n-dimensional space X has the Mazur Intersection Property ,then the sphere of the unit ball of every n-dimensional space can be covered by n+1 balls which do not meet in origin at least. But the converse is not true.

Keyword: ball-coverings;Banach space.

第一章 引 言

§1.1 研究背景

自从 1932 年 *Banach* 的名著 $\ll$ *Théorie des operations lineaires* $\gg$ 问世以来，人们开始了 *Banach* 空间的单位球和单位球面的几何理论的系统研究．可以说整个 *Banach* 空间几何学就是 *Banach* 空间单位球和单位球面的几何学，如各种凸性，光滑性均是通过单位球面的几何性质定义；从 " 整 " 球出发，用球 " 覆盖 " 集合或用其它几何形体覆盖球的直接主题也有很多。例如

一． Mazur 交性质

Mazur.S[1] 于 1933 年首先研究了具有 Mazur 交性质的 Banach 空间．Banach 空间称为具有 Mazur 交性质，当 X 中的任意有界闭凸集是一族球的交． Banach 空间具有 Mazur 交性质等价于 X 中的任意有界闭凸集 K 以及 $x\overline{\in}K$, $\exists$ 球 $B, B \supset K, s.t. x\overline{\in}B$ .1960 年， Phelps.R.R[2] 证明了有限维的 Banach 空间 X 具有 Mazur 交性质的充要条件是 B_{X^*} 的端点集在 S_{X^*} 中稠密． Giles.J,Gregory.D.A,Sims.B [3] 在 1978 年证明了 Banach 空间 X 具有 Mazur 交性质当且仅当 B_{X^*} 的 w^*- 可凹点集在 S_{X^*} 中稠密．在证明该定理时，发现 Mazur 交性质，B_{X^*} 的 w^*- 可凹点与 X 的光滑性有关． 1978 年，Giles.J,Gregory.D.A,Sims.B 又提出了是否每个具有 Mazur 交性质的 Banach 空间都是 Asplund 空间．后来， Sevilla.M.J 和 Moreno.J.P[4] 找到了一类具有 Mazur 交性质的等价范数的非 -*Asplund* 空间.

二．装球问题

Banach 空间装球问题的研究近五十年来也取得了令人瞩目的发展．装球值 $\Lambda(X) \equiv sup\{r:$ 无穷多个半径为 r 的球可以装入单位球 B_X 内 $\}$.Rankin.R.A[5,6] 等人在 50 年代中给出了可分 Hilbert 空间与 l_p 空间的装球值．Kottman.C.A[7] 在 1970 年确定了一般线性赋范空间装球值的范围是 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

Wells.J.N 和 Willians.L.R[8] 用内插法的三线定理计算了 L_p 空间的装球值. Orlicz 序列空间的装球值的准确表达式是叶以宁 [9](关于刘氏范数) 和王延辅 (关于奥氏范数) 给出的. Orlicz-Musielak 空间装球值也已由吴从炘, 叶以宁和 Hydzik.H 等人给出 [10].Orlicz 函数空间装球值的取值范围已得到 [11].Lorentz 序列空间装球值由叶以宁和张波给出 [12].

三. Plank 问题

Hilbert 空间 H 中，用一族板状体 $P_n \equiv \{h \in H : | < h, e > | \leq \frac{w_n}{2}, \|e\| = 1\}$ 覆盖球的研究也有五十多年的历史. 1951 年, Bang.T[13] 证明了 Hilbert 空间 H 中, 如果直径 w 的球可以用一族宽分别为 w_n 的板 P_n 覆盖, 则 $\sum w_n \geq w$.1991 年, Ball.k[14] 把 Bang.T 的证明从实 Hilbert 空间推广到一般 Banach 空间. 2001 年, Ball.k[15] 更进一步证明了在复 Hilbert 空间 $\sum w_n^2 \geq w^2$.

四. 拓扑度问题

拓扑度理论是研究非线性算子定性理论的有力工具，从它可以推出许多著名的不动点定理. S 是实 Banach 空间 X 的有界集，非紧性测度 $\alpha(S) \equiv inf\{\delta > 0 : S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, 直径 $d(S_i) \leq \delta\}$. 无穷维实 Banach 空间 X 的单位球和单位球面的非紧性测度都为 2, 即 $\alpha(B) = \alpha(S) = 2$[16].1981 年，郭大钧 [17] 给出了全连续场拓扑度为零的定理， 1987 年孙经先 [18] 给出了严格集压缩场在球域上拓扑度为零的定理. 1999 年，陈东青 [19] 等部分地将 [18] 中球域上结果推广到非球域.

这些问题已成为 *Banach* 空间几何学，凸分析，非线性泛函分析以及复分析的重要组成部分.

2004 年, 程立新提出了一个关于单位球面的球覆盖的一个新的几何问题, 即一个 *Banach* 空间的单位球面至少可用多少个不含原点的球所覆盖？从此出发，给出了 *Banach* 空间几何性质一系列的球覆盖刻画，例如：单位球球面可以被可数个不含原点半径小于 1 的球覆盖的空间都是可分的， n 维空间的单位球面最少可被 $2n$ 个不含原点的半径相同的球对称覆盖等等.

本文在此基础上，进一步计算了空间 $(R^n, \|\cdot\|_2)$ 中，单位球面可被

$\bigcup_{i=1}^{n} B(\pm r x_i, r)(r \in \mathbb{R}^+, x_i \in S_X)$ 覆盖时， r 的最小值是 $\frac{\sqrt{n}}{2}$, 且球心 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 构成了 R^n 的一组正交基. 同样地, 我们可以得到空间 $(R^n, \|\cdot\|_1)$ 、$(R^n, \|\cdot\|_\infty)$ 的相应 r 的最小值是 1.

如果 $2n$ 个球的球心都是光滑点且可以凸包生成以原点为内点非空的紧凸集, 则这 $2n$ 个球可以构成一个不含原点的球族覆盖单位球面. 如果 $2n$ 个球的球心仅仅可以凸包生成以原点为内点非空的紧凸集, 但这 $2n$ 个球的球心不全是光滑点, 则这 $2n$ 个球不一定构成一个不含原点的球族覆盖单位球面. 我们还发现具有 $Mazur$ 交性质的 n 维空间 X 的单位球面 S_X 最少可被 $n+1$ 个不含原点的球覆盖. 反之， n 维空间 X 的单位球面 S_X 最少可被 $n+1$ 个不含原点的球覆盖时， X 不一定具有 $Mazur$ 交性质.

§1.2 本文基本内容

全文共分为三章.

第一章 绪论 分为两节. 第一节主要回顾了 *Banach* 空间理论的发展和从 *Banach* 空间单位球的几何结构出发研究 *Banach* 空间性质的主要问题. 第二节叙述本文的基本内容.

第二章 预备知识 给出贯穿全文的基本知识. 其中包含凸函数和次微分映射；切片，强暴露点和 (RNP); 凸函数的 *Gâteaux* 可微； $n-$ 单形，暴露点，赋范集， $Mazur$ 交性质，端点等相关的概念和符号.

第三章 *Banach* 空间单位球面的球覆盖性质

分为四节.

第一节给出和本文相关的 *Banach* 空间单位球面的引理. 引理 3.1.1: 若 A 是 X 中的 n- 单形，则 $icr(A) \neq \varnothing$; 引理 3.1.2: X 是 n 维 Banach 空间， $a)$ $\Lambda \equiv \{A : A$ 是 X 中的点集且 $int(coA) \neq \emptyset\}$, 则 $min\{A^\# : A \in \Lambda\} = n+1$, $b)$ $\Lambda' \equiv \{A : A$ 是 X 中的点集， $int(coA) \neq \emptyset$ 且 $-A = A\}$, 则 $min\{A^\# : A \in \Lambda'\} = 2n$; 引理 3.1.4: 有限维 *Banach* 空间 X 中， $x \in S_X$ 是 $\|\cdot\|$ 的 $G-$ 可微点当且仅当 x 是 S_{X^*} 的 w^*- 暴露泛函；引理 3.1.5:*Banach* 空间 X 具有

RNP 当且仅当 X 的任意有界闭凸集是它的强暴露点的闭凸包.

第二节证明了无限维 $Banach$ 空间单位球面的覆盖性质. 定理 3.2.1: 设 $dimX = \infty$, 则 S_X 不能被有限个不含原点的闭球覆盖; 证明了有限维 $Banach$ 空间单位球面的覆盖性质. 定理 3.2.2: 设 $dimX = n$, 则 $a)$ S_X 可被 $2n$ 个不含原点的闭球对称覆盖; $b)$ 每个对称覆盖至少含有 $2n$ 个闭球. 定理 3.2.5: 具有 $Mazur$ 交性质的 n 维 $Banach$ 空间 X 的单位球面 S_X 最少可被 $n+1$ 个不含原点的球覆盖. 反之, n 维空间 X 的单位球面 S_X 最少可被 $n+1$ 个不含原点的球覆盖时, X 不一定具有 $Mazur$ 交性质.

第三节计算了空间 $(R^n, \|\cdot\|_2)$ 中, 单位球面可被 $\bigcup_{i=1}^{n} B(\pm r x_i, r)(r \in \mathbb{R}^+, x_i \in S_X)$ 覆盖时, r 的最小值是 $\frac{\sqrt{n}}{2}$. 同样地, 我们可以得到空间 $(R^n, \|\cdot\|_1)$ 、 $(R^n, \|\cdot\|_\infty)$ 的相应 r 的最小值是 1.

第四节给出定理 3.4.4: 暴露点是端点, 端点不是暴露点.

第二章 预 备 知 识

我们首先来回顾一下一些预备知识，这些预备知识主要是定义，它们基本贯穿了本文的始终.

不作特别声明，本文我们总假设 X 是一个 *Banach* 空间，其对偶是 X^*. 我们总是用 S_X 表示 X 的单位球面， B_X 表示 X 的单位球；同样地， S_{X^*} 表示 X^* 的单位球面， B_{X^*} 表示 X^* 的单位球. 我们用 $B(x,r)$ 表示 X 中以 x 为心， r 为半径的闭球， $A^{\#}$ 表示 A 所含元素的个数. 我们用 " □ " 表示定理证明的结束.

1. **凸函数和次微分映射**

定义 2.1 D 上实值凸函数 f 的次微分映射 $\partial f : D \to 2^{E^*}$ 定义为

$$\partial f(x) \equiv \{x^* \in X^* : f(y) - f(x) \geq < x^*, y - x >, \forall y \in D\}, x \in C.$$

对于定义在全空间上的广义实值凸函数，其次微分映射如上类似定义.

定义 2.2 D 上一个广义实值真函数 f 称为凸函数，如果 $\forall x, y \in D$ 及 $0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

显然， f 是凸的当且仅当 $epi(f)$ 是 $E \times \mathbb{R}$ 中的凸集.

2. **切片，强暴露点和** RNP

定义 2.3 i) 对一个非空子集 $A \subset E(A \subset E^*)$,$x^* \in E^*(x \in E)$ 以及 $\alpha > 0$ 我们称

$$S = S(A, x^*, \alpha) = \{x \in A :< x^*, x >> \sigma_A(x^*) - \alpha\}$$

$$(S = S(A, x, \alpha) = \{x^* \in A :< x^*, x >> \sigma_A(x) - \alpha\})$$

为 A 的切片 (w^*- 切片).

ii) 点 $x \in E$ 被称为是某个非空闭凸集 $C \subset E$ 的强暴露点，如果 $x \in C$ 且存在 $x^* \in E^* \setminus \{0\}$ 使得 $\{S_\alpha\}_{\alpha>0}$ 在 C 上形成 x 的局部基 (按范数)，其中

$S_\alpha = S(C, x^*, \alpha)$. 此时，我们称 x^* 是 C 的一个强暴露泛函并且在点 x 处强暴露 C.

iii) 设 C 是 E^* 中的 w^*- 闭凸集，且点 $x^* \in C$. 那么我们称 x^* 是 C 的 w^*- 强暴露点，如果存在 $x \in E \setminus \{0\}$ 使得 w^*- 切片 $\{S_\alpha\}_{\alpha>0}$ 在 C 上形成 x^* 的局部基 (按范数), 其中 $S_\alpha = S(C, x, \alpha)$. 此时，我们称 x 是 C 的一个 w^*- 强暴露泛函并且在点 x^* 处 w^*- 强暴露 C.

定义 2.4　设 C 是 E 的一个非空闭凸子集，我们称 C 具有 $Radon-Nikodym$ 性质 (简记为 RNP), 如果 C 的每个非空有界子集存在直径任意小的切片，即，对每个有界子集 $A \subset C$, 任意 $\varepsilon > 0$ 存在 A 的一个切片 S, 使得 $diamS < \varepsilon$.

3. **凸函数的** $G\hat{a}teaux$ **可微**

定义 2.5　设 f 是定义在非空开凸子集 D 上的连续凸函数，我们称 f 在 $x_0 \in X$ 处 $G\hat{a}teaux$ 可微，如果存在 (唯一)$x^* \in X^*$, 使得，对 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x_0 + tx) - f(x_0) - < x^*, tx > \leq t\varepsilon \|x\|, 0 < t \leq \delta.$$

显然，上述 δ 足够小，以至于 $x_0 \pm tx \in D, \forall t \in (0, \delta]$. 此时， x^* 称为 f 在点 x_0 处的 $G\hat{a}teaux$ 导数，记作 $d_G f(x_0)$.

4.$n-$ **单形**

定义 2.6　设 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, 若 $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ 线性无关，则称 $A \equiv co\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ 为 $n-$ 单形.

5. **暴露点**

定义 2.7　$x \in C$ 称为 C 的暴露点，如果存在 $x^* \in X^*, x^* \neq 0$, 使得 $< x^*, x > > < x^*, y >, \forall y \in C, y \neq x$.

6. **分离定理**

引理 2.8(分离定理)　设 X 是 (实或复) 线性赋范空间， A, B 是 X 中的非空凸集， $A \bigcap B = \varnothing$. 若 A 是紧集， B 是闭集，则存在 $f \in X^*$, 实数

$r_1, r_2, r_1 < r_2$ 使得

$$A \subset \{x : Ref(x) \leq r_1\}, B \subset \{x : Ref(x) \geq r_2\}.$$

7. **赋范集**

定义 2.9 设 $A \neq \varnothing, A \subset B_{X^*}$. 若存在 $\alpha > 0, \beta > 0$, 使得任意 $x \in X$, 均有

$$\alpha\|x\| \geq \|x\| \geq \beta\|x\|,$$

则称 A 为赋范集.

8.$Mazur$ **交性质**

定义 2.10 $Banach$ 空间称为具有 $Mazur$ 交性质, 当 X 中的任意有界闭凸集是一族球的交. 等价于 X 中的任意有界闭凸集 K, $x \overline{\in} K$, 存在球 $B, B \supset K$, 使得 $x \overline{\in} B$.

9. **端点**

定义 2.11 设 A 是实线性空间 X 的凸集. E 是 A 的子集. 若 $x, y \in A, z = tx + (1-t)y$, 对某个 $0 < t < 1$, 有 $z \in E$, 则必有 $x, y \in E$, 那么称 E 为 A 的端子集. 当 E 为单点集 $\{x\}$ 时, 则称 x 为 A 的端点.

10.(KMP)

定义 2.12 若 X 是 $Banach$ 空间. 如果对任何有界闭凸集 A,$A = \overline{co}(extA)$, 则 X 称为具有 (KMP).

有了这些预备知识以后可以开始我们的论文了.

第三章 *Banach* 空间单位球面的球覆盖性质

§3.1 单位球面的几何结构

在这一节，我们主要介绍和本文有关的 *Banach* 空间单位球面的定理.

引理 3.1.1[20] 若 A 是 X 中的 $n-$ 单形，则 A 的本质内点 $icr(A) \neq \varnothing$.

引理 3.1.2 X 是 n 维 Banach 空间，

$a)$ $\Lambda \equiv \{A : A$ 是 X 中的点集且 $int(coA) \neq \emptyset\}$, 则 $min\{A^{\#} : A \in \Lambda\} = n+1$;

$b)$ $\Lambda' \equiv \{A : A$ 是 X 中的点集， $int(coA) \neq \emptyset$ 且 $-A = A\}$, 则 $min\{A^{\#} : A \in \Lambda'\} = 2n$.

证明：任意 $A \in \Lambda' \subset \Lambda$, 因为 $int(coA) \neq \emptyset$, 所以 A 至少含有 n 个线性无关的元素 $\{x_i\}_{i=1}^n$, 否则 coA 包含在某个超平面中. 又因为任意 n 个线性无关元素的凸包的内点为空，所以 A 至少含有 n+1 个元素.

$a)$ 注意，有限维空间中，本质内点和内点是一致的. 依引理 3.1.1, 存在只含有 n+1 个元素的集合，该集合的凸包的内点非空. 进而， $min\{A^{\#} : A \in \Lambda\} = n+1$.

$b)$ 因为 A 是对称的，所以 $\{-x_i\}_{i=1}^n \subset A$. 又因为 $int(co\{\pm x_i\}_{i=1}^n) \neq \emptyset$, 所以 $min\{A^{\#} : A \in \Lambda'\} = 2n$. □

推论 3.1.3 n 维空间的赋范集 A 最少包含 $n+1$ 个元素，当 A 是对称，则最少包含 $2n$ 个元素.

证明：依引理 2.1.2 的 a), 单位球面最少可用 $n+1$ 个超平面分离. 因为每个超平面对应一个线性泛函，所以 n 维空间的赋范集 A 最少包含 $n+1$ 个元素.

依引理 2.1.2 的 b), 单位球面最少可用 $2n$ 个对称的超平面分离，所以 n 维空间的对称赋范集 A 最少包含 $2n$ 个元素. □

引理 3.1.4[21] 有限维 *Banach* 空间 X 中， $x \in S_X$ 是 $\|\cdot\|$ 的 $G-$ 可微点当且仅当 x 是 S_{X^*} 的 w^*- 暴露泛函.

引理 3.1.5[22]*Banach* 空间 X 具有 $Radon-Nikodym$ 性质当且仅当 X

的任意有界闭凸集是它的强暴露点的闭凸包.

推论 3.1.6 有限维空间的单位球是它的暴露点的闭凸包.

证明: 因为有限维空间都具有 $Radon-Nikodym$ 性质, 所以依引理 2.1.5, 单位球是它的强暴露点的闭凸包. 又因为有限维空间中, 强暴露点和暴露点一致, 所以单位球是它的暴露点的闭凸包. □

§3.2 单位球面的覆盖性质

定理 3.2.1 设 $dimX=\infty$, 则 S_X 不能被有限个不含原点的闭球覆盖.

证明: 假设存在 n 个不含原点的闭球 $\{B_i\}_{i=1}^n$, s.t.$S_X\subset\bigcup_{i=1}^n B_i$. 依凸集分离定理, $\exists x_i^*\in S_{X^*}$, s.t. $inf\{<x_i^*,x>,x\in B_i\}>0$. 注意到 $dimX=\infty$,

$$M\equiv\bigcap_{i=1}^{n}kerx_i^*\neq\{0\}.$$

从而 $S_X\bigcap M\neq\varnothing$. 即 $\exists x\in S_X\bigcap M\subset\bigcup_{i=1}^n B_i$, s.t.$<x_i^*,x>=0,i=1,2,\ldots,n$. 矛盾. □

定理 3.2.2 设 $dimX=n$, 则

$a)$ S_X 可被 $2n$ 个不含原点的闭球对称覆盖.

$b)$ 每个不含原点的球对称覆盖至少含有 $2n$ 个闭球.

证明: 依推论 2.1.6,B_{X^*} 是 B_{X^*} 的暴露点的闭凸包. 依引理 2.1.2, B_{X^*} 含有 $2n$ 个对称的暴露点 $\pm x_i^*,i=1,\ldots,n$, 记 $A=\{\pm x_i^*\}_{i=1}^n$, 使得 $int(coA)\neq\varnothing$. 因此, $\exists r_0>0$, s.t. $r_0B_{X^*}\subset coA$. 依引理 2.1.4, $\exists x_i\in S_X$,s.t.$\|x_i\|'=x_i^*$,$\|x_i\|'$ 表示 $\|\cdot\|$ 在点 x_i 的 Gateaux- 导数.

先证明 $S_X\subset\bigcup_{i=1}^n\bigcup_{j=1}^m B(\pm jx_i,j-\frac{1}{j})$.

令 $\sigma_A(x)\equiv sup\{<x^*,x>|\ x^*\in A\}$. 因为 $\sigma_A(x)=\sigma_{\overline{co}A}(x)\geq\sigma_{\{r_0B_{X^*}\}}(x)=r_0\|x\|$, 所以 $\forall y\in S_X$, $\exists x_i^*\in A,s.t.<x_i^*,y>\geq r_0$. 若 $y\overline{\in}B(jx_i,j-\frac{1}{j}),\forall j\in N$, 则

$$j-\frac{1}{j}<\|jx_i-y\|,\forall j\in N.$$

又因为 $\exists h_i \in ker(x_i^*) \equiv \{x \in X, < x_i^*, x >= 0\}$， s.t.

$$y = \beta x_i + h_i,$$

其中 $\beta =< x_i^*, y >\geq r_0 > 0$. 所以,

$$j - \frac{1}{j} < \|(j-\beta)x_i - h_i\| (\forall j \in N)$$

等价于

$$-\frac{1}{j} < \|(j-\beta)x_i - h_i\| - (j-\beta)\|x_i\| - \beta = \frac{\|x_i - \frac{1}{j-\beta}h_i\| - \|x_i\|}{\frac{1}{j-\beta}} - \beta,$$

当 j 足够大时，上式即

$$0 \leq < x_i^*, -h_i > -\beta = -\beta,$$

矛盾. 所以 $y \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B(jx_i, j - \frac{1}{j})$ ，进而

$$S_X \subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{\infty} B(\pm jx_i, j - \frac{1}{j}) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n} B(\pm jx_i, j - \frac{1}{j}).$$

因为 S_X 是紧集，所以依有限覆盖定理， $\exists m \in \mathbb{N}^+$,s.t.

$$S_X \subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m} B(\pm jx_i, j - \frac{1}{j}).$$

令 $B_{i,j} \equiv B(jx_i, j - \frac{1}{j})$. 因为

$$B_{i,j} \subset B_{i,j+1},$$

所以

$$S_X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\pm mx_i, m - \frac{1}{m}).$$

$a)$ 得证.

下面证明 $b)$ 每个对称覆盖至少含有 $2n$ 个闭球.

假设 $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ 是 S_X 的不含原点的对称球覆盖，则

$$\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda} = \{-B_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}.$$